Proceedings of IAM, V.1, N.1, 2012, pp.88-96

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н.А. Алиев[1], А. М. Алиев[2]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: aahmad@rambler.ru

Резюме. Работа посвящена смешанной задаче для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа с нелокальными граничными условиями. Исследуется нестационарное одномерное движение газожидкостной смеси в цилиндрической трубе постоянного поперечного сечения. Проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: смешанная задача, нелокальные граничные условия, преобразование Лапласа, гиперболические уравнения.

AMS Subject Classification: 35L02, 35L04

1. Введение

Применение газлифтного способа требует решения задач математической модели процессов, протекающих при движении жидкости, газа и их смеси в скважине. Многие известные исследователи [7-16] обращались к теории газлифта, положив в основу принципы и методы решения задач движения газожидкостной смеси(ГЖС) в вертикальных трубах. Установлено, что все понятия и определения, изложенные в теории движения ГЖС в трубах, в равной мере применимы к газлифтной эксплуатации скважин и служат ее теоретической основой.

На практике часто приходится рассчитывать газожидкостные потоки с переменными по сечению параметрами. В ряде случаев эти потоки можно рассматривать как одномерные, с некоторыми средними значениями параметров в каждом сечении. Движение потока в скважине характеризуется многими факторами. Например, относительное движение фаз, трение потока о трубы и т.д. Эти факторы необходимо учитывать при расчете и осуществлении газлифтного способа добычи нефти.

Как было сказано выше, математическая модель рассматриваемого процесса является системой, состоящей из двух двумерных линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка гиперболического типа.

1. Постановка задачи

Предполагается, что все переменные, характеризующие поток газожидкостной смеси, постоянны по сечению трубы. При этом уравнение движения и неразрывности записываются в виде:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \dfrac{\lambda}{8\delta}\rho w^2 + \rho g\cos\theta + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[(1+\beta)\rho w^2\right], \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} = c^2\dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z}, \qquad\qquad 0 < z < l,\ t > 0\ , \end{cases}$$

где p - избыточное давление над ее средним значением, ρ - плотность, w - средняя скорость потока, θ - угол между осью трубы и вертикальной осью, g - ускорение силы тяжести, c - скорость звука в смеси, z - координата вдоль оси трубы, l – длина трубопровода, t -время, λ - коэффициент гидравлического сопротивления, δ, β и величина $\lambda w/8\delta$ принимается постоянным. Для ламинарного режима движения, это последнее предположение выполняется точно, а для турбулентного, приближенно. В предпоследнем члене первого уравнения системы совершим преобразования:

$$\rho g\cos\theta \approx \frac{g}{w_0}(\rho w)\cos\theta,$$

где w_0 -средняя скорость потока по длине трубопровода. Подобная линеаризация в последнем члене даст:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+\beta)\rho w^2\right] \approx (1+\beta)w_0\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\ .$$

При этом получается следующая смешанная задача для замкнутой системы двух линейных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p(t,z)}{\partial t} = -c^2\dfrac{\partial q(t,z)}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial q(t,z)}{\partial t} = -\dfrac{\partial p(t,z)}{\partial z} - b\dfrac{\partial q(t,z)}{\partial z} - 2aq(t,z),\ \ z \in (o,l),\ \ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$p(0,z) = q(0,z) = 0, \qquad z \in [0,l], \tag{2}$$

$$\begin{cases} p(t,l) + \alpha_1 p(t,0) = f_1(t), \\ q(t,l) + \alpha_2 q(t,0) = f_2(t), \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $q = \rho w,\ \ b = (1+b)w_0,\ 2a = \dfrac{\lambda w}{8\delta} + \dfrac{g\cos\theta}{w_0}$ $, a, b, c, \alpha_1$ и α_2 - вещественные постоянные, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - гладкие вещественнозначные функции.

Применяя преобразования Лапласа [1], приходим к следующей граничной задаче

$$R'(\lambda, z) = A(\lambda)R(\lambda, z), \quad z \in (0, l), \tag{4}$$

$$R(\lambda, l) + \alpha R(\lambda, 0) = F(\lambda), \tag{5}$$

где

$$R(\lambda, z) = \begin{pmatrix} \tilde{p}(\lambda, z) \\ \\ \tilde{q}(\lambda, z) \end{pmatrix},$$

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{b\lambda}{c^2} & -(\lambda + 2a) \\ -\dfrac{\lambda}{c^2} & 0 \end{pmatrix}, \ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \ F(\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\lambda) \\ \tilde{f}_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что решение граничной задачи (4)-(5), представляется в виде:

$$R(\lambda, z) = e^{A(\lambda)z}\left(e^{A(\lambda)l} + \alpha\right)^{-1} F(\lambda). \tag{6}$$

Преобразуя правую часть (6) к стандартному виду, имеем:

$$R(\lambda, z) = \begin{pmatrix} -\chi_1 e^{\chi_1 z} & -\chi_2 e^{\chi_2 z} \\ \dfrac{\lambda}{c^2} e^{\chi_1 z} & \dfrac{\lambda}{c^2} e^{\chi_2 z} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} |m(\lambda)| e^{\chi_1 z} + \dfrac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2 - \alpha_1\chi_1) & \dfrac{\lambda}{c^2}(\alpha_2 - \alpha_1)\chi_2 \\ \dfrac{\lambda}{c^2}(\alpha_1 - \alpha_2)\chi_1 & |m(\lambda)| e^{\chi_2 z} + \dfrac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2 - \alpha_2\chi_1) \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{c^2} & \chi_2 \\ -\dfrac{\lambda}{c^2} & \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\lambda) \\ \tilde{f}_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $|m(\lambda)| = \dfrac{\lambda}{c^4}\sqrt{(b^2 + 4c^2)\lambda^2 + 8ac^2\lambda}$.

Так как характеристическое уравнение матрицы $A(\lambda)$ имеет вид

$$\left|A(\lambda)-\chi I\right| = \begin{vmatrix} \frac{b\lambda}{c^2}-\chi & -(\lambda+2a) \\ -\frac{\lambda}{c^2} & -\chi \end{vmatrix} = \chi^2 - \frac{b\lambda}{c^2}\chi - \frac{\lambda}{c^2}(\lambda+2a) = 0\,, \qquad (7)$$

имеющие корни

$$\chi_k = \frac{b\lambda + (-1)^k\sqrt{(b^2+4c^2)\lambda^2 + 8ac^2\lambda}}{2c^2}, \qquad k = 1,2\,, \qquad (8)$$

то собственные векторы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\chi_k \\ \frac{\lambda}{c^2} \end{pmatrix}, \quad k = 1,2.$$

Рассмотрим матрицу $m(\lambda)$, составленную из собственных векторов приведенных выше

$$m(\lambda) = \begin{pmatrix} -\chi_1 & -\chi_2 \\ \frac{\lambda}{c^2} & \frac{\lambda}{c^2} \end{pmatrix}\,. \qquad (9)$$

Определим обратную матрицу. Для этого сначала вычислим определитель этой матрицы:

$$\left|m(\lambda)\right| = -\frac{\lambda}{c^2}\chi_1 + \frac{\lambda}{c^2}\chi_2 = \frac{\lambda}{c^2}(\chi_2-\chi_1) = \frac{\lambda}{c^4}\sqrt{(b^2+4c^2)\lambda^2+8ac^2\lambda}$$

Тогда [17]

$$m^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\left|m(\lambda)\right|}\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{c^2} & \chi_2 \\ -\frac{\lambda}{c^2} & -\chi_1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Вычислим следующее произведение:

$$m^{-1}(\lambda)A(\lambda)m(\lambda) = \frac{1}{\left|m(\lambda)\right|}\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{c^2} & \chi_2 \\ -\frac{\lambda}{c^2} & -\chi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{b\lambda}{c^2} & -(\lambda+2a) \\ -\frac{\lambda}{c^2} & 0 \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} -\chi_1 & -\chi_2 \\ \frac{\lambda}{c^2} & \frac{\lambda}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}\,. \qquad (11)$$

Теперь вычислим $e^{A(\lambda)z}$. Легко видеть, что

$$m^{-1}(\lambda)e^{A(\lambda)z}m(\lambda)=e^{[m^{-1}(\lambda)A(\lambda)m(\lambda)]z}=e^{\begin{pmatrix}\chi_1 & 0\\ 0 & \chi_2\end{pmatrix}z}=\begin{pmatrix}e^{\chi_1 z} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 z}\end{pmatrix},$$

т.е.

$$e^{A(\lambda)z}=m(\lambda)\begin{pmatrix}e^{\chi_1 z} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 z}\end{pmatrix}m^{-1}(\lambda). \qquad (12)$$

Тогда, исходя из (6), для решения граничной задачи (4)-(5) имеем

$$R(\lambda,z)=m(\lambda)\begin{pmatrix}e^{\chi_1 z} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 z}\end{pmatrix}m^{-1}(\lambda)\left[m(\lambda)\begin{pmatrix}e^{\chi_1 l} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 l}\end{pmatrix}m^{-1}(\lambda)+\alpha\right]^{-1}F(\lambda)=$$

$$=m(\lambda)\begin{pmatrix}e^{\chi_1 z} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 z}\end{pmatrix}m^{-1}(\lambda)\left\{m(\lambda)\left[\begin{pmatrix}e^{\chi_1 l} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 l}\end{pmatrix}+m^{-1}(\lambda)\alpha m(\lambda)\right]m^{-1}(\lambda)\right\}^{-1}F(\lambda)=$$

$$=m(\lambda)\begin{pmatrix}e^{\chi_1 z} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 z}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}e^{\chi_1 l} & 0\\ 0 & e^{\chi_2 l}\end{pmatrix}+m^{-1}(\lambda)\alpha m(\lambda)\right]^{-1}m^{-1}(\lambda)F(\lambda)\ . \qquad (13)$$

Далее вычислим следующее произведение:

$$m^{-1}(\lambda)\alpha m(\lambda)=\frac{1}{|m(\lambda)|}\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{c^2} & \chi_2\\ -\frac{\lambda}{c^2} & -\chi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\chi_1 & -\chi_2\\ \frac{\lambda}{c^2} & \frac{\lambda}{c^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|m(\lambda)|}\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1) & \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2\\ \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 & \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$R(\lambda,z)=\begin{pmatrix}-\chi_1 e^{\chi_1 z} & -\chi_2 e^{\chi_2 z}\\ \frac{\lambda}{c^2}e^{\chi_1 z} & \frac{\lambda}{c^2}e^{\chi_2 z}\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1) & \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2\\ \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 & |m(\lambda)|e^{\chi_2 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)\end{pmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{c^2} & \chi_2 \\ -\frac{\lambda}{c^2} & -\chi_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{f}_1(\lambda) \\ \tilde{f}_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Далее

$$\Delta(\lambda)\equiv\det\begin{pmatrix} |m|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1) & \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2 \\ \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 & |m|e^{\chi_2 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1) \end{pmatrix}=$$

$$=|m\ |^2 e^{\frac{b\lambda}{c^2}l}+\frac{\lambda}{c^2}[e^{\chi_1 l}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)+e^{\chi_2 l}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)]|m|+\frac{\lambda^2}{c^4}\alpha_1\alpha_2(\chi_2-\chi_1)^2$$

а решение граничной задачи (4)-(5) примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}(\lambda,z) \\ \tilde{q}(\lambda,z) \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} -\chi_1\left[|m(\lambda)|e^{\chi_2 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)\right]e^{\chi_1 z}+\chi_2\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 e^{\chi_2 z} \\ \frac{\lambda}{c^2}|m(\lambda)|e^{\chi_2 l+\chi_1 z}+\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)e^{\chi_1 z}-\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 e^{\chi_2 z} \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_1\chi_2 e^{\chi_1 z}-\chi_2\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1\right]e^{\chi_2 z} \\ -\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2 e^{\chi_1 z}+\frac{\lambda}{c^2}\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z} \end{matrix}\Bigg)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{c^2}\tilde{f}_1(\lambda)+\chi_2\tilde{f}_2(\lambda) \\ -\frac{\lambda}{c^2}\tilde{f}_1(\lambda)-\chi_1\tilde{f}_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

или же отделяя каждого элемента полученного столбца, имеем:

$$\tilde{p}(\lambda,z)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\times$$

$$\times\left\{-\chi_1\left[|m(\lambda)|e^{\chi_2 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)\right]e^{\chi_1 z}+\chi_2\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 e^{\chi_2 z}\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{c^2}\widetilde{f}_1(\lambda)+\chi_2\widetilde{f}_2(\lambda)\right]+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\times\left\{\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_1\chi_2 e^{\chi_1 z}-\right.$$

$$\left.-\chi_2\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z}\right\}\times\left[-\frac{\lambda}{c^2}\widetilde{f}_1(\lambda)-\chi_1\widetilde{f}_2(\lambda)\right]$$

$$\widetilde{q}(\lambda,z)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\frac{\lambda}{c^2}|m(\lambda)|e^{\chi_2 l+\chi_1 я}+\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)e^{\chi_1 z}-\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 e^{\chi_1 z}\right\}\times$$

$$\times\left[\frac{\lambda}{c^2}\widetilde{f}_1(\lambda)+\chi_2\widetilde{f}_2(\lambda)\right]+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{-\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2 e^{\chi_1 z}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{c^2}\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z}\right\}\times\left[-\frac{\lambda}{c^2}\widetilde{f}_1(\lambda)-\chi_1\widetilde{f}_2(\lambda)\right].$$

Наконец, пользуясь обратным преобразованием Лапласа и леммой Жордана, имеем

$$p(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^t f_1(\tau)d\tau\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\frac{\lambda}{c^2\Delta(\lambda)}\left\{-\chi_1\left[|m(\lambda)|e^{\chi_2 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)\right]e^{\chi_1 z}+\right.$$

$$+\chi_2\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 e^{\chi_2 z}-\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_1\chi_2 e^{\chi_1 z}+$$

$$\left.+\chi_2\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z}\right\}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^t f_2(\tau)d\tau\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\frac{1}{\Delta(\lambda)}\times$$

$$\times\left\{-\chi_1\chi_2\left[|m(\lambda)|e^{\chi_2 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1\chi_2-\alpha_2\chi_1)\right]e^{\chi_1 z}+\right. \qquad (14.1)$$

$$+\chi_2^2\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_1-\alpha_2)\chi_1 e^{\chi_2 z}-\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_1^2\chi_2 e^{\chi_1 z}+$$

$$\left.+\chi_1\chi_2\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z}\right\}$$

$$q(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^t f_1(\tau)d\tau\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\frac{\lambda}{c^2\Delta(\lambda)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\lambda}{c^2}|m(\lambda)|e^{\chi_2 l+\chi_1 z}+\frac{\lambda^2}{c^4}\alpha_1(\chi_2-\chi_1)e^{\chi_1 z}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2 e^{\chi_1 z}-\frac{\lambda}{c^2}\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z}\right\}+ \qquad (14.2)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^t f_2(\tau)d\tau\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\chi_2\frac{\lambda}{c^2}|m(\lambda)|e^{\chi_2 l+\chi_1 z}+\frac{\lambda^2}{c^4}\chi_2\alpha_1(\chi_2-\chi_1)e^{\chi_1 z}+\right.$$

$$\left.+\chi_1\frac{\lambda^2}{c^4}(\alpha_2-\alpha_1)\chi_2 e^{\chi_1 z}-\chi_1\frac{\lambda}{c^2}\left[|m(\lambda)|e^{\chi_1 l}+\frac{\lambda}{c^2}(\alpha_2\chi_2-\alpha_1\chi_1)\right]e^{\chi_2 z}\right\}.$$

С этим установлено следующее утверждение

Теорема. Пусть a,b,c,l и σ положительные, а α_1 и α_2 вещественные постоянные, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ вещественнозначные непрерывные функции, тогда решение смешанной задачи (1)-(3) представимо в виде (14.1) и (14.2). Применяя лемму Жордана и переходя от интеграла по линии Лапласа к контурному интегралу, затем переходя к сумму вычета по нулям $\Delta(\lambda)$, получаем вычетное представление решения смешанной задачи (1)-(3).

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М.:Наука, М., 1971, 512 с.
2. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных, М.: Наука, 2006, 287 с.
3. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов, М.:Наука, 2006, 173 с.
4. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применение, М.: Высшая школа, 1988.
5. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла, М.Наука, 1964.
6. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.А. Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1965, 749 с.
7. Чарный И.А. Неустановившееся движения реальной жидкости в трубах, М.: Гостехиздат, 1951.
8. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарное движения вязкопластических сред, М.:Изд-во Моск. Унив., 1970, 416 с.
9. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И. М. Хасаев А.М., Гусев В.И Технология и техника добычи нефти, М.:Недра, 1986, 382 с.
10. Нагиев Ф.Б., Ильясов М.Х., Мамедова Ф.М. Распространение малых возмущений в цилиндрической оболочке, наполненной двухфазной жидкостью, Изв. НАН Азерб., сер. физ.-тех. и мат наук, 1986, № 6, стр. 36-39.
11. Щуров В.И. Технология и техника добычи нефти, М., Недра,1983, 510 с.
12. Уоллис Г. Одномерные двухфазовые течения, М.: Мир, 1972.
13. Мамаев В.А., Одишария Г.Э., Клапчук О.В. Движения газожидкостных смесей в трубах, М.: Недра, 1978, 270 с.
14. Чисхолм Д. Двухфазные течения в трубопроводных и теплообменниках, М.: Недра, 1986, 204 с.

15. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. Доклады Национальной Академии Наук Азербайджана, 2008, № 4, стр.107-115.
16. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Проблемы математического моделирования оптимизации и управления газлифта, Доклады Национальной Академии Наук Азербайджана, 2009, №2, стр.43-57.
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, М.:Наука, 1967, 575 с.

Qeyri lokal sərhəd şərtli birinci tərtib xüsusi törəməli tənliklər üçün qarışıq məsələ

N.Ə. Əliyev, Ə.M. Əliyev

XÜLASƏ

Məqalədə birinci tərtib xüsusi törəməli hiperbolik tənliklər sistemi üçün qarışıq məsələyə baxılır. Qaz-maye qarışığının sabit en kəsikli silindrik boruda qeyri stasionar bir ölçülü hərəkəti tədqiq olunur. Ədədi eksperimentlər yerinə yetirilmişdir.

Açar sözlər: qarışıq məsələ, qeyri lokal sərhəd şərti, Laplas çevirməsi, hiperbolik tənlik.

Mixed problem for the first order partial differential equation with nonlocal boundary conditions

N.A. Aliev, A.M. Aliev

ABSTRACT

The work is devoted to the mixed problem for the system of hyperbolic type first order linear partial differential equations with nonlocal boundary conditions. Non stationary one-dimensional motion of gas-liquid mixture in the cylindrical pipe with constant cross section is investigated. The numerical experiments have been done.

Keywords: mixed problem, nonlocal boundary conditions, Laplace transformation, hyperbolic equation.